

## REKENEN OP DE TOEKOMST

Ronald Keijzer

*Ronald Keijzer studeerde wiskunde en promoveerde in 2003 aan de VU op een proefschrift rond het leren van breuken. Hij is sinds oktober 2009 lector rekenen-wiskunde en didactiek aan de Hogeschool iPabo. Hij is een van de hoofdredacteurs van de serie Rekenen-wiskunde in de praktijk en van de TAL-boeken voor de bovenbouw van de basisschool. Hij heeft vele publicaties op zijn naam staan over het opleidingsonderwijs rekenen-wiskunde.*

*Ronald Keijzer is projectleider van de Grote Rekendag en hoofdredacteur van Volgens Bartjens - Ontwikkeling en Onderzoek. Hij heeft meegewerkt aan de kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo's, die in 2009 is opgesteld in opdracht van de HBO-raad en is op dit moment een van de redacteurs van de landelijke kennisbasistoets rekenen-wiskunde.*

### Rekenen of wiskunde

Veel mensen kennen het volgende overzichtelijke beeld van het onderwijs in rekenen en wiskunde in Nederland. Rekenen doe je op de basisschool en wiskunde is een vak in het voortgezet onderwijs. Op de basisschool wordt gerekend met getallen, terwijl in het voortgezet onderwijs al snel wordt overgeschakeld op het gebruiken van variabelen. Dit beeld is inderdaad overzichtelijk, maar het klopt niet. Immers, rekenen doen leerlingen ook na de basisschool. En wanneer we rekenen en wiskunde uit elkaar te trekken, doen we geen recht aan een doorlopende ontwikkeling van jonge mensen. Die leren rekenen en wiskunde omdat dat van belang is voor hun maatschappelijk functioneren en die ontwikkeling neemt niet ineens een heel andere wending bij de overstap van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs.

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen gaf aan hoe de rekenontwikkeling na de basisschool zou moeten verlopen. De meeste leerlingen behalen aan het eind van de basisschool het niveau dat in het algemeen wordt aangeduid als het 1S-niveau, waarbij de letter 'S' staat voor 'streef' van 'streefniveau'. In ieder geval zou, zo schetst de expertgroep, 90 procent van de leerlingen aan het einde van de basisschool het 1F-niveau moeten halen, waarbij de letter 'F' staat voor 'fundamenteel'. Maar het 1F-niveau is zeker niet voldoende om maatschappelijk te functioneren. Daarvoor is het 2F-niveau nodig, dat vrijwel alle leerlingen volgens de commissie doorlopende leerlijnen op 16 jarige leeftijd zouden moeten behalen (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2008). Leerlingen die het 2F-niveau gehaald hebben kunnen getallen verbinden met situaties en gepast rekenen met afgeronde getallen (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2009). En omdat de overheid het behalen van dit niveau van belang acht, ontstond het idee van rekentoetsen af te nemen in het voortgezet onderwijs. Dat gaat overigens voorlopig niet door vanwege politiek verzet.

Er is ook een tweede en wellicht belangrijker reden waarom het overzichtelijke beeld dat rekenen iets is voor de basisschool en wiskunde iets is voor het voortgezet onderwijs bijstelling behoeft. Het onderscheid dat in het Nederlands gemaakt wordt tussen rekenen en wiskunde heeft historische wortels, die terug gaan tot het begin van de zeventiende eeuw. Stevin (1608) gebruikte het woord 'wisconst' (wat later verbasterde tot wiskunde) als aanduiding voor verschillende aanpakken voor het meten en het achterhalen van meetkundige relaties. Stevin achtte de Nederlandse taal geschikter om wetenschap te bedrijven dan het Latijn en dus gebruikte hij 'wisconst' in plaats van het Latijnse 'mathematica'. Hij hanteerde ook allerlei Nederlandstalige rekentermen bijvoorbeeld voor de hoofdbewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) en het woord 'reken-const' voor rekenkunde. Hiervoor kon hij putten uit de Nederlandstalige rekenboeken van zijn voorgangers uit de vijftiende- en zestiende eeuw (Kool, 1999). Ook

in andere Europese landen verschenen steeds meer rekenboeken in de volkstalen, maar daar was het in de zeventiende eeuw nog niet gebruikelijk om ook in de wetenschap het Latijn te verlaten. Zij blijven lange tijd de term 'mathematica' trouw en uiteindelijk komt een afgeleide van deze Latijnse term in de volkstaal terecht. Het Nederlands is de enige Europese taal (afgezien van het IJslands) waar het woord 'wiskunde' niet is afgeleid van 'mathematica'.

Maar er is meer. In de zestiende- en zeventiende eeuw richtte het onderwijs zich op het vormen van leerlingen tot vaardige rekenaars. De leerlingen moesten vlot allerlei algoritmes kunnen uitvoeren en allerlei praktische standaardvraagstukken uit de beroepspraktijk op kunnen lossen. In de rekenboekjes uit de zestiende eeuw gaat het om standaardrekenen. Het zelf kennis construeren, zelf nieuwe problemen oplossen, handig gebruik maken van getalsrelaties en nadenken over oplossingsaanpakken waren geen doelen van het onderwijs. Men ging er van uit dat het allereerst moest gaan om het vlot en vaardig kunnen uitvoeren van algoritmes of rekenregels om standaardvraagstukken te kunnen maken. Het leren denken was voor later.

Nog altijd zijn er mensen die er voor pleiten het rekenonderwijs op de basisschool te richten op het leren van het toepassen rekenregels voor de vier hoofdbewerkingen. Dit is evenwel niet de invulling van het rekenen, zoals die bijvoorbeeld wordt beschreven in de kerndoelen. De kerndoelen geven aan dat het in de basisschool gaat het om het verwerven van *wiskundige* geletterdheid en *wiskundetaal*. Het vak wordt in de kerndoelen dan ook niet aangeduid als 'rekenen' maar als 'Rekenen/Wiskunde' (SLO, 2006). We kunnen ons afvragen waarom de aanduiding 'rekenen' nog altijd nodig is. Wat zou het niet makkelijk zijn als we, net als elders in Europa, het vak rekenen-wiskunde op de basisschool gewoon aanduiden als wiskunde? Er zijn verschillende pogingen gedaan om die merkwaardige dubbele benaming te vervangen door het enkelvoudige 'wiskunde', om zo bijvoorbeeld aan te sluiten bij wat inmiddels internationaal gebruik is (zie bijvoorbeeld Treffers, 1987). Dat neemt niet weg dat het moeilijk blijkt afscheid te nemen van 'rekenen' op de basisschool, getuige de aanduiding van de doorlopende leerlijnen, de titel van het rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool' die de KNAW over het reken-wiskundeonderwijs schreef en het zoeken naar overlap tussen de 'vakken' rekenen en wiskunde in het voortgezet onderwijs en het mbo (KNAW, 2009; Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2008; Bosker & Van de Vorle, 2014).

### **Wat is wiskunde?**

De wat historische beschouwing waarmee ik dit betoog begon, doet al vermoeden dat mijn voorkeur uitgaat naar de aanduiding 'wiskunde' voor het vak in de basisschool dat nogal eens wordt aangeduid als 'rekenen'. Ik zal het vak daarom verder aanduiden als 'wiskunde'. Bij die wiskunde gaat het om modelleren, schematiseren, abstraheren, generaliseren, structureren en formaliseren. Het rekenen met getallen hoort daar bij, want bijvoorbeeld een som als  $284+61$  kan gezien worden als formalisering van een situatie waarin 284 en 61 objecten bij elkaar gevoegd worden. Bij het oplossen van de som gebruikt men in het algemeen een schema of een model.

De Kerndoelen Rekenen/Wiskunde (SLO, 2006) voor het basisonderwijs beschrijven in de preambule wat kenmerkend is voor dit vak in de basisschool. We zouden dit kunnen zien als beschrijving van waar het bij de wiskunde in die basisschool om gaat, namelijk:

- wiskunde leren zien in betekenisvolle situaties,
- het verwerven van wiskundetaal,
- het passend omgaan met formele en informele notatiewijzen, schematische voorstellingen, tabellen en grafieken,
- kennis van getalrelaties en getalreferenties.

In de tekst van de kerndoelen wordt dit geheel samengevat als het verwerven van wiskundige geletterdheid ofwel gecijferdheid. Iemand die gecijferd is herkent getallen en getalsmatige informatie in zijn omgeving en gaat daar op een passende manier mee om

(Hoogland & Meeder, 2007). Iemand die gecijferd is heeft daarnaast de beschikking over een breed repertoire van getalrelaties, om die in te zetten als het nodig is. Zo herkent bijvoorbeeld iemand die gecijferd is in een sticker met de tekst '35 % korting' dat er iets meer dan een derde van de prijs af gaat. Hij of zij kan ook bedenken dat je een uurtje loopt over een afstand die je binnen 20 minuten met de fiets aflegt. Om dit laatste te bedenken zijn referenties nodig die ook bij deze wiskundige geletterdheid passen, namelijk een idee over hoe snel iemand loopt en hoe snel een fietser gaat. Overigens is gecijferdheid of wiskundige geletterdheid iets wat iedereen op een geheel eigen manier verwerft. De wiskunde kan hierbij gezien worden als een almaar groeiend bouwwerk. Met het inzetten van referenties, getalrelaties en gekende procedures bouwen mensen stukje bij beetje aan hun eigen wiskunde.

Dit idee van het bouwen aan de eigen wiskunde, die daarmee van mens tot mens verschilt, sluit aan bij (onder andere) Freudenthal (1968; 1971), die wiskunde omschrijft als menselijke activiteit. Wiskunde is niet de verzameling formules en rekenregels die door mensen (en computers) gebruikt worden, maar de activiteit die mensen ondernemen als ze bedenken welke regelmaat er is, welke structuur ze herkennen, hoe je die kunt achterhalen door schema's en modellen te gebruiken en ze daarbij rekenregels en getalrelaties kunnen inzetten. Het is ook de activiteit die leidt tot het bedenken van dergelijke rekenregels. Wiskunde als menselijke activiteit maakt ook dat wiskunde zich het best laat omschrijven in werkwoorden als 'abstraheren', 'schematiseren', 'modelleren', 'formaliseren' en 'structureren'. Dat is namelijk wat mensen doen als ze wiskundig bezig zijn. Ze mathematiseren hun omgeving, wat zo veel inhoudt als dat ze hun omgeving door een wiskundige bril bekijken, om met de wiskunde die zo ontstaat aan de slag te gaan. Als ik bijvoorbeeld in een straat bij huisnummer 134 sta, terwijl ik bij 98 moet zijn, weet ik dat ik een flink aantal huizen terug moet lopen. Als even en oneven nummers aan één kant van de straat staan, dan is het 34 huizen terug om bij nummer 100 te komen. Dan zijn er nog twee te gaan. We abstraheren de straat tot een getallenlijn, waar we sprongen over maken, en gebruiken kennis van de getallenrij en getalsstructuur om te bepalen welke sprongen bruikbaar zijn. Overigens gaat het bij wiskunde om veel meer dan om het mathematiseren van de alledaagse werkelijkheid. De wiskunde zelf kan ook een herkenbare omgeving zijn. Een leerling die ziet dat  $134 - 98 = 34 + 2 = 36$  ziet door zijn of haar wiskundige bril de bewerking aftrekken als het aanvullen en ziet in dat dat bij de som  $134 - 98$  veel oplevert. De tweede situatie lijkt daarbij op de eerste situatie, maar dan op een hoger niveau. Wiskundeonderwijs is er specifiek op gericht om leerlingen te begeleiden dit hogere niveau te bereiken. Het middel daarvoor is het doordenken van situaties die reeds gekend zijn.

### **Wiskunde van de toekomst**

In navolging van onder andere Freudenthal stel ik wiskunde hier dus voor als menselijke activiteit, waarbij betekenisvolle situaties – zowel buiten als binnen de wiskunde – aanleiding geven tot mathematiseren. Dit mathematiseren schetste ik als de wereld door een wiskundige bril bekijken. Door dit gericht te doen, bijvoorbeeld onder begeleiding van een leraar, leer je meer van de wiskunde. Je eigen wiskundige bouwwerk wordt telkens vergroot. En als je mathematiseren op die manier beschouwt, is de stap naar onderzoekend leren klein. Immers onderzoekend leren is niet veel anders dan kritisch naar je eigen omgeving kijken, om er aldus greep op te krijgen – bijvoorbeeld door geschikte vragen te stellen en op zoek te gaan naar passende middelen om deze vragen te beantwoorden. Je leert zo bij onderzoekend leren van het proces, namelijk het uitvoeren van het onderzoek, en ook van het resultaat, het antwoord dat je uiteindelijk vond (Tanis, Dobber, Zwart, & Van Oers, 2014). We zouden kunnen zeggen dat als we mathematiseren zien als onderzoekend leren, dat we dan het middel in het onderzoek tot op zekere hoogte vastleggen. Bij mathematiseren gaat het immers om wiskundige middelen gebruiken en ontwikkelen om een vraag te beantwoorden die de omgeving oproept. Anders gezegd: mathematiseren kan volgens mij goed gezien worden als *vorm* van onderzoekend leren.

'Nou en...?', zo zal u zich wellicht afvragen. 'Waarom zou je mathematiseren zo graag willen beschouwen als onderzoekend leren?' Dat wil ik graag uitleggen. Onderzoekend leren wordt op tal van manieren geassocieerd met het leren voor de toekomst. Dat geldt veel minder voor het rekenen. Dat wordt vooral – overigens samen met taal – gezien als instrumentele vaardigheid die ingezet moet worden bij andere vakken, op het moment dat het aankomt op onderzoekend leren (Platform Onderwijs2032, 2016). Dit idee dat het bij rekenen vooral gaat om het instrumentele karakter – de vaardigheid om de vier hoofdbewerkingen passend toe te passen – sluit aan bij het verwerven van vaardigheden die van belang waren in de zeventiende eeuw. Ik gaf eerder aan dat het goed zou zijn om daar afstand van te nemen. Waar vroeger het rekenen nodig was voor de handel, is die taak om snel berekeningen te maken in veel gevallen overgenomen door computers. Het gebruik van dergelijke nieuwe technologieën maakt dat de contexten waarin de wiskunde moet worden gebruikt, maar ook moet worden ontwikkeld, een andere is dan bijvoorbeeld eind vorige eeuw. Het bezien van wiskunde als proces van mathematiseren opent het perspectief op de toekomst en biedt ook kansen om accenten te verleggen in het wiskundeonderwijs op de basisschool. Denk daarbij bijvoorbeeld aan het programmeren van apparaten en het omgaan en structureren van grote hoeveelheden gegevens. Deze nieuwe onderwerpen vragen om leerlingen die op onderzoek gaan, omdat pasklare antwoorden niet zo maar beschikbaar zijn en de problemen niet kunnen worden opgelost door een vaste werkwijze te volgen. Nadruk op het mathematiseren maakt ook de wiskunde zelf tot onderzoeksgebied en dat biedt kansen om leerlingen te voorzien van een passend repertoire om in en met de wiskunde verder te komen.

### **Tot slot**

Het vervangen van het woord 'rekenen' door het woord 'wiskunde' kan helpen om op een andere manier naar het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool te kijken. Het zet wellicht aan het denken en dat was hier ook het doel. De connotatie die kleeft aan het woord 'rekenen' – het louter instrumentele rekenen – is niet meer van deze tijd. Daar hebben we afscheid van genomen en dat zouden we wellicht nog wat radicaler kunnen doen. Het uitbreiden van de betekenis van 'wiskunde' is echter geen tovermiddel. Als we het rekenonderwijs in de toekomst alleen maar aanduiden als wiskundeonderwijs en verder geen actie ondernemen, dan verandert er natuurlijk niets. Het gebruiken van een ander woord zou een voorbode moeten zijn voor het anders richten van het denken. Dat probeerde Simon Stevin ook door rond 1600 te kiezen voor het (puur) Nederlandse woord 'wisconst'. Ik pleit ervoor om te denken in termen van 'mathematiseren'. Omdat de toekomst daar om vraagt, ook al gaat het bij 'mathematiseren' om een leenwoord uit het klassieke Latijn.

### **Literatuur**

- Bosker, R., & Van de Vorle, R. (2014). *Advies over de uitwerking van de referentieniveaus 2F en 3F voor rekenen in toetsen en examens*. Enschede: SLO.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. (2008). *Over de drempels met taal en rekenen*. Enschede: SLO.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. (2009). *Referentiekader Taal en Rekenen*. Enschede: SLO.
- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3/4), 413-435.
- Hoogland, K., & Meeder, M. (2007). *Gecijferdheid in beeld*. Utrecht: APS.
- KNAW. (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: KNAW.
- Kool, M. J. (1999). *Die conste vanden getale: een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw*. Hilversum: Verloren.
- Platform Onderwijs2032. (2016). *Ons onderwijs2032 - Eindadvies*. Den Haag: OCW.
- SLO. (2006). *Kerndoelen primair onderwijs*. Den Haag: OCW.
- Stevin, S. (1608). *Wisconstighe gedachtenissen. Deel 1: van 't weereltschrift*. Leiden: Ian Bouvvensz.

- Tanis, M., Dobber, M., Zwart, R., & Van Oers, B. (2014). *Beter leren door onderzoek. Hoe begeleid je onderzoekend leren van leerlingen?* Amsterdam: Vrije Universiteit.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Van der Schvere van Meenen, I. (1600). *Arithmetica Oft Reken-const.* Haarlem: Gillis Hooman Boeckdrucker.